LIÈGE université
Sciences

Mathématiques générales II (MATH0009)

Année académique 2023-2024

Corrigé de l'interrogation du 19 avril 2024

Version 7 mars 2024

QUESTIONNAIRE

Questions de théorie

1. (a) Enoncer précisément les propriétés fondamentales de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme faisant intervenir une somme et un produit.
(b) Soient les réels b, c tels que $b^2 - 4c < 0$. Démontrer que le polynôme $z \mapsto z^2 + bz + c$ possède exactement deux zéros et que ceux-ci sont des complexes conjugués.

2. QCM : Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0.25 ; pas de réponse : 0.
   (a) Si f est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ alors le plus grand ensemble sur lequel la fonction de fonction $x \mapsto f(x^2)$ est dérivable est
   □ $\mathbb{R}$
   □ $]0, +\infty[$
   □ $]-\infty, 0[$
   □ $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
   □ Aucune des autres réponses n'est correcte.
   (b) Si z est un complexe quelconque alors la partie réelle $1 + i\bar{z}$ est toujours égale à
   □ 1
   □ $\Im(z)$
   □ $-\Im(z)$
   □ $1 + \Im(z)$
   □ Aucune des autres réponses n'est correcte.
   (c) L'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 0$ est celle
   □ d'une hyperbole
   □ d'un cercle
   □ de deux droites
   □ d'une parabole
   □ Aucune des autres réponses n'est correcte.

Exercices

1. Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

$$(a) \lim_{x \to +\infty} \Big(\ln(2x-1) - \ln(x+1) \Big) \qquad (b) \lim_{t \to 0^-} \frac{e^{1/t}}{t}$$

2. Déterminer la partie imaginaire et le module du complexe $z = i^7/(i-1)$.
3. Résoudre l'équation différentielle suivante, en spécifiant dans quel intervalle on travaille.

$$D^2 f(x) - Df(x) = e^x + 1$$

4. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x) = \ln(2x+1) \ .$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.
(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter l'approximation à l'ordre 1 ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport au graphique de l'approximation **en utilisant la notion de reste**.

5. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale suivante et simplifier votre réponse au maximum.

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2 - x - 2}\, dx$$

6. (a) L'expression suivante est-elle définie ? Justifier.

$$\ln\left(2\, e^3 \cos(\pi/3)\right) + e^{2\ln(\sqrt{3})}$$

(b) Si elle est définie, en vous servant des propriétés des fonctions élémentaires, simplifier cette expression au maximum.

CORRIGE

Questions de théorie

1. **(a) Enoncer précisément les propriétés fondamentales de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme faisant intervenir une somme et un produit.**
(b) Soient les réels b, c tels que $b^2 - 4c < 0$. Démontrer que le polynôme $z \mapsto z^2 + bz + c$ possède exactement deux zéros et que ceux-ci sont des complexes conjugués.
Solution. Voir cours (amphi et syllabus).

2. **QCM : Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0.25 ; pas de réponse : 0.**
(a) Si f est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ alors le plus grand ensemble sur lequel la fonction de fonction $x \mapsto f(x^2)$ est dérivable est
☐ $\mathbb{R}$
☐ $]0, +\infty[$
☐ $]-\infty, 0[$
♣ $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
(b) Si z est un complexe quelconque alors la partie réelle $1 + i\bar{z}$ est toujours égale à
☐ 1
☐ $\Im(z)$
☐ $-\Im(z)$
♣ $1 + \Im(z)$
☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
(c) L'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 0$ est celle
☐ d'une hyperbole
☐ d'un cercle
♣ de deux droites
☐ d'une parabole
☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

Exercices

1. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes.**

$$(a) \lim_{x \to +\infty} \Big(\ln(2x-1) - \ln(x+1) \Big) \qquad (b) \lim_{t \to 0^-} \frac{e^{1/t}}{t}$$

Solution. (a) La fonction $f : x \mapsto \ln(2x-1) - \ln(x+1)$ est définie sur

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 > 0,\ x + 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1/2,\ x > -1\} =]1/2, +\infty[$$

et comme A n'est pas majoré, la limite en $+\infty$ a un sens.
Si on essaye de passer directement à la limite sur les deux logarithmes, on obtient la forme indéterminée « $+\infty - \infty$ » et on ne sait pas conclure ; il faut donc procéder autrement.
Vu les propriétés des logarithmes, quel que soit $x \in A$, on a

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$$

et f est alors une fonction de fonction à savoir

$$f(x) \ = \ \ln(g(x)), \quad x \in A \quad \text{où} \quad g(x) = \frac{2x-1}{x+1}.$$

Comme $\lim_{x \to +\infty} \ g(x) = 2$ on obtient

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \ = \ \lim_{y \to 2} \ln(y) \ = \ \ln(2).$$

(b) La fonction $f : t \mapsto e^{1/t}/t$ est définie sur $\mathbb{R}_0$ et comme tout intervalle ouvert comprenant 0 est d'intersection non vide avec $\mathbb{R}_0$, la limite demandée a un sens.
Si on essaye de passer directement à la limite au numérateur et au dénominateur, on tombe sur la forme indéterminée « $0/0$ » et on ne sait donc pas conclure ; il faut donc procéder autrement.
Cette fonction peut aussi s'écrire sous la forme

$$f(t) \ = \ (1/t) \times e^{1/t} \ = \ g\left(\frac{1}{t}\right)$$

avec $g(y) \ = \ y\,e^y$. Ici encore on va appliquer le théorème donnant la limite d'une fonction de fonction.
On a $\lim_{t \to 0^-}(1/t) = -\infty$. Il faut donc déterminer $\lim_{y \to -\infty} g(y) = \lim_{y \to -\infty}(ye^y)$. Si on passe directement à la limite, on obtient la forme indéterminée « $\infty \times 0$ ». Il faut donc procéder autrement.
On utilise le théorème de l'Hospital en écrivant le produit $y\ e^y$ sous la forme du quotient y/e^{-y}.
Considérons $V =]-\infty, -N[$ avec $N > 0$ ainsi que les fonctions $F : y \mapsto y$ et $h : y \mapsto e^{-y}$. Ces fonctions sont dérivables sur V, la dérivée $Dh(y) = -e^{-y} \neq 0, \ \forall y \in V$ et les limites de ces fonctions en $-\infty$ sont infinies.
Dès lors, comme

$$\lim_{y \to -\infty} \frac{DF(y)}{Dh(y)} = \lim_{y \to -\infty} \frac{1}{-e^{-y}} = \lim_{y \to -\infty}(-e^y) = 0,$$

on a

$$\lim_{y \to -\infty}(ye^y) = \lim_{y \to -\infty} g(y) = 0.$$

Dès lors

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{e^{1/t}}{t} \ = \ \lim_{t \to 0^-} g\left(\frac{1}{t}\right) \ = \ \lim_{y \to -\infty} g(y) \ = \ \lim_{y \to -\infty}(ye^y) \ = \ 0.$$

2. **Déterminer la partie imaginaire et le module du complexe $z = i^7/(i-1)$.**

Solution. Puisque

$$z = \frac{i^7}{i-1} = \frac{-i}{-1+i} = \frac{-i\,(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{i-1}{2} = \frac{-1+i}{2},$$

sa partie imaginaire vaut $1/2$ et son module $\sqrt{1/4+1/4} = \sqrt{2}/2$.

3. **Résoudre l'équation différentielle suivante, en spécifiant dans quel intervalle on travaille.**

$$D^2f(x) - Df(x) = e^x + 1$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2f(x) - Df(x) = 0$; le polynôme caractéristique est alors $z \mapsto z^2 - z = z(z-1)$ et ses zéros sont 0 et 1. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = c_1 + c_2 e^x, \ x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x \mapsto e^x + 1$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme g est une somme de deux fonctions, cherchons tout d'abord une solution particulière de $D^2 f(x) - Df(x) = e^x$ (*) .

Le second membre de cette équation est l'exponentielle polynôme $x \mapsto 1 \times e^x$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient 1 de la variable est un zéro simple du polynôme caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_1(x) = Ax\, e^x,\ x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer.

Comme $Df_1(x) = A(1+x)e^x$ et $D^2 f_1(x) = A(2+x)e^x$, en remplaçant dans (*), on a successivement

$$\begin{aligned} A(2+x)e^x - A(1+x)e^x = e^x\ \forall x \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow A(2+x) - A(1+x) = 1\ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow 2A + Ax - A - Ax = 1\ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow A = 1. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$f_1(x) = x\, e^x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Cherchons à présent une solution particulière de $D^2 f(x) - Df(x) = 1$ (**). On voit immédiatement que $f_2(x) = -x,\ x \in \mathbb{R}$ est solution de (**).

Ainsi, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1 + c_2 e^x + x\, e^x - x,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

4. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x) = \ln(2x+1)\ .$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0**.**

Solution. La fonction f est infiniment dérivable sur $]-1/2, +\infty[$. En dérivant, on a successivement

$$\begin{aligned} Df(x) &= \frac{2}{2x+1}, \\ D^2 f(x) &= -\frac{4}{(2x+1)^2}, \\ D^3 f(x) &= \frac{16}{(2x+1)^3}. \end{aligned}$$

Comme $f(0) = \ln(1) = 0,\ Df(0) = 2$ et $D^2 f(0) = -4$, si on note P_n l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(0) + Df(0)\, x \ = \ 2x, \\ P_2(x) &= f(0) + Df(0)\, x + D^2 f(0)\, \frac{x^2}{2} \ = \ 2x - 4 \times \frac{x^2}{2} = \ 2x - 2x^2,\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.

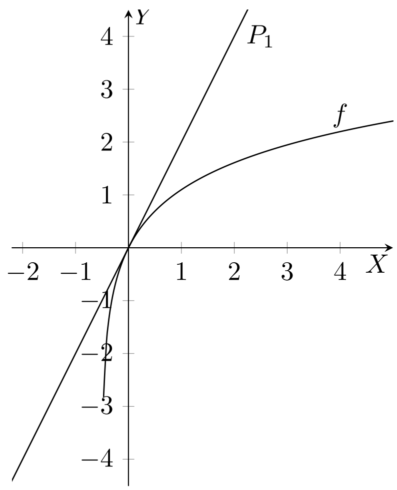
Solution. Si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe u_1 et u_2 strictement compris entre 0 et x tels que

$$\begin{aligned} R_1(x) &= -\frac{4}{(2u_1+1)^2} \times \frac{x^2}{2}\ , \\ R_2(x) &= \frac{16}{(2u_2+1)^3} \times \frac{x^3}{3!} = \frac{8}{(2u_2+1)^3} \times \frac{x^3}{3},\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Dans un même repère orthonormé, représenter l'approximation à l'ordre 1 ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport au graphique de l'approximation en utilisant la notion de reste.

Solution. Vu l'expression du reste R_1, on voit que $R_1(x)$ est toujours négatif pour x voisin de 0. Dès lors le graphique de f est situé en dessous de celui de P_1 au voisinage de 0.

Voici la représentation graphique de P_1 et f au voisinage de 0.



5. **Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale suivante et simplifier votre réponse au maximum.**

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2 - x - 2}\, dx$$

Solution. La fonction $f : x \mapsto 1/(x^2 - x - 2) = 1/((x+1)(x-2))$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ donc sur le fermé non borné $[3, +\infty[$. Pour étudier son intégrabilité en $+\infty$, comme la fonction est positive sur $[3, +\infty[$, on utilise la définition et on calcule la limite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_3^t \frac{1}{(x+1)(x-2)}\, dx.$$

Si cette limite est finie, la fonction sera intégrable en $+\infty$ donc sur $[3, +\infty[$ et la valeur de la limite sera la valeur de l'intégrale.

Pour calculer l'intégrale, on doit décomposer la fraction rationnelle propre en une somme de fractions simples, donc déterminer les réels uniques A et B tels que

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-2)}{(x+1)(x-2)}, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}.$$

Vu les propriétés des polynômes, on a l'égalité $1 = (A+B)x + A - 2B$ vraie pour tout réel, équivalente au système d'équations linéaires

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - 2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ -3B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/3 \\ B = -1/3. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
I &= \int_3^t \frac{1}{(x+1)(x-2)}\, dx \\
&= \frac{1}{3}\int_3^t \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right) dx \\
&= \frac{1}{3}\Big[\ln(x-2) - \ln(x+1)\Big]_3^t \\
&= \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)\right]_3^t \\
&= \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{t-2}{t+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{4}\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{t-2}{t+1}\right) + \ln(4)\right]
\end{aligned}$$

et

$$\lim_{t\to+\infty}\int_3^t \frac{1}{(x+1)(x-2)}\, dx = \frac{1}{3}\ln(4) = \frac{2}{3}\ln(2)$$

puisque, vu le théorème de la limite de fonction de fonction, on a

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t-2}{t+1} = 1 \text{ et } \lim_{y\to 1}\ln(y) = \ln(1) = 0 \text{ donc } \lim_{t\to+\infty}\ln\left(\frac{t-2}{t+1}\right) = 0.$$

Ainsi, comme la limite est finie, la fonction est intégrable sur $[3,+\infty[$ et son l'intégrale sur cet ensemble vaut $(2/3)\ln(2)$.

6. **(a) L'expression suivante est-elle définie ? Justifier.**

$$\ln\Big(2\,e^3\cos(\pi/3)\Big) + e^{2\ln(\sqrt{3})}$$

Solution. Le domaine de définition de ln est $]0,+\infty[$. Comme $\cos(\pi/3) > 0$, l'argument du logarithme est positif donc le premier terme est défini ; il en va de même pour le second puisqu'une racine carrée est toujours positive.

(b) Si elle est définie, en vous servant des propriétés des fonctions élémentaires, simplifier cette expression au maximum.

Solution. On sait que

$$\cos(\pi/3) = 1/2,\ \ln(e^3) = 3\ln(e),\ \ln(e) = 1 \text{ et } \ln(\sqrt{3}) = \ln(3^{1/2}) = (1/2)\ln(3).$$

Comme les fonctions exponentielle et logarithme sont inverses l'une de l'autre, l'expression donnée vaut

$$\ln\Big(2\,e^3\cos(\pi/3)\Big) + e^{2\ln(\sqrt{3})} = \ln(e^3) + e^{\ln(3)} = 3 + 3 = 6.$$